ファジィランダムコストをもつ最小スパニングツリー問題 (数理モデルにおける決定理論)

片桐, 英樹; 石井, 博昭

数理解析研究所講究録
1079 巻 1999 年 196-204

ファジィランダムコストをもつ最小スパニングツリー問題

大阪大学　*片桐　英樹　KATAGIRI Hideki
大阪大学　石井　博昭　ISHII Hiroaki

1　はじめに

ネットワークにおける応用上重要な問題の一つとしてスパニングツリー問題がある。そのうち、枝のコストの和を最小にする問題を最小スパニングツリー問題と呼び、費用が確定値で与えられている場合の解法については、[1, 2, 3, 4, 5] によって効率的なアルゴリズムが与えられている。

コストが確率変数で与えられている場合については、H.Ishii らによって研究されており、総和コストに関する機会制約条件計画問題として定式化したモデル [6] や目標値とともに確率レベルも同時に最大化しようとするモデル [7] に対し多項式時間で解く効率的なアルゴリズムを提案している。

また、コストが可能性変数で表される場合における解法は伊藤ら [8] によって導入され、片桐らによってより効率的なアルゴリズムが提案されている [9]。

従来、不確実性が存在する場合の意思決定法として、大きく分けて確率計画法によるアプローチとファジィ数理計画法によるアプローチが研究されてきたが、現実にはコストが確率的に変動する場合でもその実現値を完全に知る事が出来ないこともあり、ファジィ性とランダム性が同時に現れることも多い。本研究では、このような確率とファジィの両性質をもつ要素をファジィランダム変数で表し、ファジィ性とランダム性が存在する状況下での意思決定法の一つを提案する。

まず、2 節でファジィランダム変数について簡単に述べた後、3 節で総和コストに対するファジィ目標を設定し、そのファジィ目標を満たす可能性測度がある値 h 以上である確率があるレベル α 以上であるという制約の下で、h を最大化する問題として定式化する。4 節で元の問題を解くための部分問題を導入し、さらに 5 節でその部分問題を解くためにパラメータを含むスパニングツリー問題を導入し、元の問題の最適解を多項式時間で求めるアルゴリズムを示す。

2　ファジィランダム変数

事象の発生にかかわる不確かさを扱うものとして確率があり、一方、人間の主観や言葉、意味の曖昧さを表現するものとしてファジィ集合は、これらの曖昧さあるいは不確かさは基本的に異なるものであり、現実には曖昧な事象がランダムに観測されるといった場合など同時に 2 つを考慮にいれる必要がある場合も多い。このような状況に適用できる数学的概念として、1978 年に Kwakernaak によって最初に導入されたファジィランダム変数がある [10]。その後、Puri と Ralescu がランダム集合を拡張する形で別の定義を与えると共に理論的な土台を構築した [11]。その他にも何人かの研究者がファジィランダム変数を定義している [12, 13, 14]。ファジィランダム変数はひとことで言えば確率変数の実現値がファジィ集合になる変数のことである。例えば、ある集団に対し、明日の天候をたずねた時、「暑い」や「涼しい」といった言葉で回答する場合、ある集団における回答は、ファジィランダム変数の実現値の集まり（標本）とみなすことが出来る。

本研究では、ファジィ数における中心が確率変数であるようなファジィランダム変数を扱っており、この場合には Kwakernaak の定義と Puri, Ralescu の定義は一致することが知られている [15]。

3 定式化

$G=(N,E)$ を点集合 $N=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ と枝集合 $E=\{e_1,e_2,\ldots,e_m\}\subset N\times N$ からなる無向グラフとし、e_i にはコスト c_i が設定されているものとする。G におけるスパニングツリー $T=T(N,S)$ は $S\subseteq E$ かつ閉路を含まない連結部分グラフである。

T は次のように $0-1$ 変数の $x_1,x_2,\ldots,x_m$ で表すことができる。

$$
\begin{aligned}
T\ :\ \ & x_i=1,\ \ e_i\in S\\
& x_i=0,\ \ e_i\notin S
\end{aligned}
$$

以下では X を $T(N,S)$ に対応する $0-1$ ベクトルの集合とし、X をスパニングツリーの集合とみなす。このとき、最小スパニングツリー問題は以下のように定式化される。

$$
\begin{aligned}
P_1:\quad & \mathit{minimize}\ \ \boldsymbol{cx}\\
& \mathit{subject\ to}\ \ \boldsymbol{x}\ \in X
\end{aligned}
$$

本稿ではコスト c_i が次のようなメンバシップ関数をもつ可能性分布 $\mu_{C_i(\omega)}$ で制限されるファジィランダム変数である場合について考察する。

$$\mu_{C_i(\omega)}(c_i)=\max\left\{L\left(\frac{c_i-d_i(\omega)}{\alpha_i}\right),\ 0\right\}$$

ここで型関数 L は $\mathbf{R}\to[0,\ 1]$ である単調減少連続関数で $L(x)=L(-x)\ \ \forall x\in\mathbf{R}$ かつ $L(0)=1$ を満たすものとする。また、$d_i(\omega)$ は平均 μ_i, 分散 σ_i^2 をもつ正規分布に従う互いに独立な確率変数とする。すなわち、可能性変数において中心が確率変数になっている場合であり、$d_i(\omega)$ に伴って $\mu_{C_i(\omega)}(c_i)$ も確率的に変動する。

$y=\boldsymbol{cx}$ とすると y を表すファジィランダム変数 $Y(\omega)$ は D.Dubois と H.Prade [17] によるファジィ数の演算を適用して

$$\mu_{Y(\omega)}(y)=\max\left\{L\left(\frac{y-\sum_{i=1}^{m}d_i(\omega)x_i}{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i x_i}\right),\ 0\right\}$$

となる。次に目的関数値にファジィ目標 G を「$Y(\omega)$ がだいたい y_1 以下である」とし、G を次のようなメンバシップ関数に特性づけられるファジィ集合で表す。

$$\mu_G(y)=\begin{cases}1, & y\le y_1\\ g(y), & y_1<y<y_2\\ 0, & y\ge y_2\end{cases}$$

ここで、g は単調減少連続関数とする。さらにファジィ目標 G を満たす可能性測度を次のように定義する。

$$\Pi_{Y(\omega)}(G)\triangleq\sup_{y}\min\{\mu_{Y(\omega)}(y),\ \mu_G(y)\}$$

$\Pi_{Y(\omega)}$ は $\mu_{Y(\omega)}$ に伴って確率変数となる。従来、不確実性が存在する状況下での意思決定法として確率計画法やファジィ数理計画法が考えられており、種々の意思決定法が研究されている。確率計画法に関しては [18] に、またファジィ数理計画法に関しては [19, 20] に詳しく述べられている。また、ファジィ数理計画法と確率計画法の比較やその類似性についての研究も行われている [21, 22, 23]。近年、ファジィ性とランダム性を同時に考慮した意思決定法も多く研究されている [24, 25, 26, 27, 28, 29]。ファジィランダム変数を数理計画に応用した研究には [30, 31, 32] らがあるが、我々は P_1 に対する意思決定法とし

て、確率計画法における P モデルとファジィ数理計画法における可能性計画法をあわせた形の次のモデルを提案する。

$$
\begin{aligned}
P_2: \quad & \textit{maximize} \;\; h \\
& \textit{subject to} \; Pr\left(\Pi_{Y(\boldsymbol{\omega})}(G) \geq h\right) \geq \alpha \\
& \qquad \boldsymbol{x} \in X
\end{aligned}
$$

である。ここで Pr は確率測度を表し、確率レベル α は $\alpha > \frac{1}{2}$ を満たす確定値とする。

$\Pi_{Y(\boldsymbol{\omega})}(G) \geq h$ を変形すると

$$
\begin{aligned}
& \sup_y \min\{\mu_{Y(\boldsymbol{\omega})}(y),\; \mu_G(y)\} \geq h \\
\Leftrightarrow \quad & \exists\, y: \text{“}\mu_{Y(\boldsymbol{\omega})}(y) \geq h,\; \mu_G(y) \geq h\text{”} \\
\Leftrightarrow \quad & \exists\, y: \text{“}L\left(\frac{y - \sum_{i=1}^m d_i(\omega)x_i}{\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i}\right) \geq h,\; \mu_G(y) \geq h\text{”} \\
\Leftrightarrow \quad & \exists\, y: \text{“}y \geq \sum_{i=1}^m d_i(\omega)x_i - L^*(h)\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i,\; y \leq \mu_G^*(h)\text{”} \\
\Leftrightarrow \quad & \sum_{i=1}^m d_i(\omega)x_i - L^*(h)\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i \leq \mu_G^*(h)
\end{aligned}
$$

となるので P_2 は次の P_3 のように変形される。

$$
\begin{aligned}
P_3: \quad & \textit{maximize} \;\; h \\
& \textit{subject to} \quad Pr\left(\sum_{i=1}^m \{d_i(\omega) - L^*(h)\alpha_i\}\, x_i \leq \mu_G^*(h)\right) \geq \alpha \\
& \qquad \boldsymbol{x} \in X
\end{aligned}
$$

ただし、$L^*(\cdot), \mu_G^*(\cdot)$ は次のような擬逆関数である。

$$
\begin{aligned}
L^*(h) &= \begin{cases} \sup\{r \mid L(r) > h, r \geq 0\} & (0 < h \leq 1) \\ \infty & (h = 0) \end{cases} \\
\mu_G^*(h) &= \sup\{r \mid \mu_G(r) \geq h\}
\end{aligned}
$$

正規分布の性質から

$$
\frac{\sum_{i=1}^m d_i(\omega)x_i - \sum_{i=1}^m \mu_i x_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2 x_i}}
$$

は標準正規分布 N(0,1) に従うので、K_α を α 分位点とすると次のような等価確定条件に変換される。

$$
\sum_{i=1}^m \{\mu_i - L^*(h)\alpha_i\}\, x_i + K_\alpha \sqrt{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2 x_i} - \mu_G^*(h) \leq 0
$$

となる。ゆえに解くべき問題は次の P となる。

$$
\begin{aligned}
P: \quad & \textit{maximize} \;\; h \\
& \textit{subject to} \;\; \sum_{i=1}^m \{\mu_i - L^*(h)\alpha_i\}\, x_i + K_\alpha \sqrt{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2 x_i} \leq \mu_G^*(h) \\
& \qquad \boldsymbol{x} \in X
\end{aligned}
$$

4 部分問題の導入

以下では

$$z(\boldsymbol{x},h) \triangleq \sum_{i=1}^{m} \{\mu_i - L^*(h)\alpha_i\} x_i + K_\alpha \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sigma_i^2 x_i}$$

と定義し、次の部分問題を考える。

$$\begin{aligned} P_4: \quad & \textit{minimize} \;\; z(\boldsymbol{x},\, h) \\ & \textit{subject to} \;\; \boldsymbol{x} \in X \end{aligned}$$

この問題と元の問題 P に対して次の補題が成り立つ。

補題 1 P の最適値 h^* が $0 < h^* < 1$ であるとき、P_4 の最適解が P の最適解である必要十分条件は P_4 における最適解 $\boldsymbol{x}^*$ に対して $z(\boldsymbol{x}^*,\, h^*) = \mu_G^*(h^*)$ が成り立つことである。

証明 $0 < h < 1$ のとき、μ_G の定義から、$\mu_G^*(h) = g^{-1}(h)$ となる。P の最適解と最適値をそれぞれ $\boldsymbol{x}^*$, $h^*(0 < h^* < 1)$ とし、$z(\boldsymbol{x}^*, h^*) = g^{-1}(h^*)$ でないと仮定する。このとき、h^* における $\boldsymbol{x}^*$,) の実行可能性より $z(\boldsymbol{x}^*,\, h^*) < g^{-1}(h^*)$, すなわち

$$\sum_{i=1}^{m} \{\mu_i - L^*(h^*)\alpha_i\} x_i^* + K_\alpha \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sigma_i^2 x_i^*} < g^{-1}(h^*)$$

が成り立つ。ところが $L^*(h)$ と $g^{-1}(h)$ の単調減少性と連続性から $z(\boldsymbol{x}^*,\, h)$ に対して $h^* < h'$ が存在する。このことは h^* の最適性に矛盾する。

逆に P_4 の最適解を $(\boldsymbol{x}^*,\, h^*)$ とし、$z(\boldsymbol{x}^*,\, h^*) = g^{-1}(h^*)$ を満たすものとする。これが P の最適解でないとすると、以下の関係式を満たす $(\boldsymbol{x}',\, h')$ が存在する。

$$h^* < h' \tag{1}$$

$$\text{かつ} \quad \sum_{i=1}^{m} \{\mu_i - L^*(h)\alpha_i\} x_i' + K_\alpha \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sigma_i^2 x_i'} \le g^{-1}(h') \tag{2}$$

ところが $(\boldsymbol{x}^*,\, h^*)$ の最適性と $L^*(h)$, $g^{-1}(h)$ の単調減少性により以下の関係式が成り立つ。

$$\begin{aligned} g^{-1}(h') < g^{-1}(h^*) &= \sum_{i=1}^{m} \{\mu_i - L^*(h^*)\alpha_i\} x_i^* + K_\alpha \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sigma_i^2 x_i^*} \\ < \; & \sum_{i=1}^{m} \{\mu_i - L^*(h^*)\alpha_i\} x_i' + K_\alpha \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sigma_i^2 x_i'} \\ < \; & \sum_{i=1}^{m} \left\{\mu_i - L^*(h')\alpha_i\right\} x_i' + K_\alpha \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sigma_i^2 x_i'} \end{aligned}$$

これは (2) 式に矛盾する。 □

次に

$$f_1(\boldsymbol{x}) \triangleq \sum_{i=1}^{m} \{\mu_i - L^*(h)\alpha_i\} x_i, \;\; f_2(\boldsymbol{x}) \triangleq \sum_{i=1}^{m} \sigma_i^2 x_i$$

P_4 を解くために補助問題として h 一定の下で 2 目的問題

$$
\begin{aligned}
P_4' : \quad & minimize \;\; f_1(\boldsymbol{x}) \\
& miminize \;\; f_2(\boldsymbol{x}) \\
& subject\ to \;\; \boldsymbol{x} \in X
\end{aligned}
$$

を考える。

補題 2 P_4 の最適解であるための必要条件は P_4' の非劣解であることである。

証明 P_4 の最適解 $\boldsymbol{x}^*$ が P_4' の非劣解でないとする。このとき、$\boldsymbol{x}^*$ は 2 目的問題 P_4' の非劣解ではないので、$i \neq j$ に対して

$$
f_i(\boldsymbol{x}^*) > f_i(\boldsymbol{x}') \tag{3}
$$
$$
f_j(\boldsymbol{x}^*) \geq f_j(\boldsymbol{x}') \tag{4}
$$

を満たすある $\boldsymbol{x}'$ が存在する。$\boldsymbol{x}^*$ の最適性より $z(\boldsymbol{x}^*,\ h^*) = g^{-1}(h^*)$ であるが、(3), (4) より $\boldsymbol{x}'$ に対しては $z(\boldsymbol{x}',\ h^*) < g^{-1}(h^*)$ が成り立つ。このとき、$z(\boldsymbol{x}',\ h') < g^{-1}(h')$ を満たす $h^* < h'$ が存在することになり h^* の最適性に矛盾する。 □

5 解法とアルゴリズム

補題 2 より、P の最適解を求めるには、効率よく非劣解を列挙し、可能性測度を最大化するスパニングツリーを求めればよいことがわかる。

また、P_4' に対しては、スカラー化して一目的にすることにより、異なる全ての非劣解を求めることができる。したがって、次の問題を考える。

$$
\begin{aligned}
P_4'(\lambda) : \quad & minimize \quad \sum_{i=1}^{m} \left(\mu_i - L^*(h)\alpha_i + \lambda K_\alpha \sigma_i^2\right) x_i \\
& subject\ to \quad \boldsymbol{x} \in X
\end{aligned}
$$

h 一定のとき、$P_4'(\lambda)$ は一つのパラメータ λ をもつパラメトリック最小スパニングツリー問題となり、[33] による効率的な解法が提案されている。

したがって、目的関数の係数部分を

$$
c_i' = \mu_i - L^*(h)\alpha_i + K_\alpha \sigma_i^2 \lambda
$$

とおくと、c_i は枝 e_i に付随するコストであり、h と λ の 2 つのパラメータによって変化する。P_4' の非劣解のうち、異なるものを全て求めるには、最小スパニングツリーを求めるアルゴリズムを考慮に入れると, c_i' の順序が入れ替わるところを全て調べれば十分であることがわかる。(5) 式は 2 つのパラメータ $h,\ \lambda$ をもつことから $L^*(h) = q$ とおくとこれは 3 次元空間 $(h,\ \lambda,\ c_i)$ における平面を表している。$c_i' = c_j'$ を満たす λ を λ_{ij} とすると

$$
\lambda_{ij} = \frac{\mu_i - \mu_j + q(\alpha_j - \alpha_i)}{K_\alpha(\sigma_j^2 - \sigma_i^2)} \tag{5}
$$

であり、$\mu_i,\ \sigma_i,\ K_\alpha$ は定数であるから、(q, λ) 平面における直線になる。ゆえに q が固定されれば λ_{ij} の順序は一意に決まる。ここで次の補題が成り立つ。

補題 3 異なる 2 平面の交わりの λ 座標の順序が一定ならば、c_i' 座標の順列の集合は一意に決まる。

証明　2 平面 $k,\ l$ の交わりの直線を λ_{kl} とすると 2 平面の c_i' 座標の順序は λ_{kl} の前後のみで変わる。いま、平面 $\lambda = 0$ との交わりである直線の c_i' 切片の順序が i $(i = 1, \ldots, m)$ であるとする。2 平面の交点 λ_{kl} の中で 0 より大きい値の中でうち一番小さい値を λ_{st} とすると $0 < \lambda < \lambda_{st}$ において m 本の平面の c_i' 座標の順序は一定であり、平面 $\lambda = \lambda_{st}$ において直線 $s,\ t$ が交わり、その 2 直線の c_i' 座標の順序のみが入れ替わる。以下、順に λ 座標の小さいものから順に考えていけば交点間では c_i' 座標の順序は一意に決まり、その前後では交わった 2 平面の順序が入れ替わるだけである。よって、2 直線の交点の順序が一定ならば現れる順序の集合は一意に決まる。□

補題 4 から次の定理が導かれる。

定理 1　2 目的スパニングツリー問題の非劣解の数はせいぜい $O(m^4)$ である。

証明　2 平面 $k,\ l$ の交線は $c_k' = c_l'$ より

$$\lambda = \frac{\mu_l - \mu_k + q(\alpha_k - \alpha_l)}{K_\alpha(\sigma_k^2 - \sigma_l^2)}$$

となるため、q が決定されれば交点の値は定まり、交点の順序は一意に決まる。逆に 2 平面同士の交線の順序が一致する（その前後で入れ替わる）q はもし存在するならばただ一つに決まる。また 2 平面 $i,\ j$ の交わる直線 λ_{ij} と 2 平面 $j,\ k$ の交わる直線 λ_{jk} の交点、すなわち 3 平面の交点も、もし存在するならば、ただ一つに決まる。4 平面以上が交点を持つ場合は少なくとも 3 平面が交点をもつ必要があるため、考慮する必要はない。残りは平面 $\lambda = 0$, すなわち c_i' 切片における順序が入れ替わる場合があり、

$$h = \frac{\mu_k - \mu_l}{\alpha_k - \alpha_l}$$

によって求まる。2 平面の交線の数は $O(m^2)$ あり、交線の λ 座標が一致する q の数は高々$O(m^4)$ である。3 平面については $O(m^3)$, また c_i' 切片の順序については $O(m^2)$ であるため、全体としては $O(m^4)$ で抑えられる。□

これまでのことを考慮して以下のようなアルゴリズムを示す。アルゴリズム内において最適値 h^* の上限、下限をそれぞれ、$\overline{h}, \underline{h}$ で表す。

アルゴリズム

手順 1: 次の 3 つについて $h = L(q)$ の計算し、ソートする。

1. $\mu_i - \beta\alpha_i$ の順序が入れ替わる q の計算をおこなう。
2. $y_i,\ y_j,\ y_k$ $(i,\ j,\ k = 1,\ \ldots,\ m)$ の交点を求め、かつ $\lambda > 0$ を満たす組を保持する。
3. y_i と y_j の交線 λ_{ij} と、y_k と y_l の交線 λ_{kl} を求め、それらの順序が変わるところを求める。

ソートした結果を $h_1 < h_2 < \cdots < h_q$ とし、手順 2 へ進む。

手順 2: $\overline{h} = \underline{h}$ ならば手順 5 へ進む。そうでなければ中央値 $\hat{h}$ で $h = \hat{h}$ を固定し非劣解を求める。さらにそれらの非劣解のうちで $z(\boldsymbol{x}, h) \leq g^{-1}(h)$ を満たすものが存在するかどうか調べる。$z(\boldsymbol{x},\ h) > g^{-1}(h)$ ならば手順 3 へ進む。$z(\boldsymbol{x}\ , h) = g^{-1}(h)$ ならば終了し、そのときの解が最適解となる。$z(\boldsymbol{x}\ , h) < g^{-1}(h)$ ならば手順 4 へ進む。

手順 3: $h = \underline{h}$ とし、手順 2 へ戻る。

手順 4: $h = \overline{h}$ とし、手順 2 へ戻る。

手順 5: 求めた h での最適なスパニングツリーの候補をすべて求め $\min_{i\in K} c'_i$ を求めて、$z(\boldsymbol{x}, h) \leq g^{-1}(h)$ を満たす最大の h を与えるスパニングツリーが最適解である。

定理 2 P_4 の最適解はせいぜい $O(m^4 \log m)$ の計算量で求まる。

証明 手順 1 においては、$\mu_i - \beta\alpha_i$ の数が m 個存在するために $O(m^2)$ の計算を、また、m 個のうち 3 つを選んで交点を求めるため $O(m^3)$, さらに λ_{ij} の数は多くとも $O(m^2)$ で抑えられるため、$O(m^4)$ の計算を必要とする。そして求めた h が全体で $O(m^4)$ 個存在し、それらをソートするため、全体で $O(m^4 \log m)$ の計算時間を必要とする。手順 2 においては、ソートしたものに対しその中央値を選択しその h の下で非劣解を求めるが、繰り返し毎に多くとも $O(mn^{1/3})$ 個の非劣解が存在し、一回あたりスパニングツリーを求める計算時間を $O(SPT)$ とすると、全体で $O(mn^{1/3}) \times O(SPT) = O(mn^{1/3}O(SPT))$ の計算時間がかかる。手順 5 においては最適な h が存在する範囲を見つけた後、その範囲での最適なスパニングツリーの候補を全て求めるのに、$(O(n^{2.5} \times O(SPT))$ の計算時間を要し、さらに を求めるのに $(O(n^{2.5} \log n))$ の計算時間を要する。よって全体で計算時間は多くとも $O(m^4 \log m)$ になる。 □

6 結言

本稿では可能性測度最大化モデルについて述べたが、必然性測度最大化モデルについても同様の方法で解くことができる。

本研究で考案したアルゴリズムでは、(3) 式においてコストの順序が変わる可能性のあるところを全て求めている。しかし、パラメータが一つである場合のパラメトリックスパニングツリー問題の最適解のうち異なるものを全て効率よく列挙する方法が [33] で提案されており、この方面からのアプローチによってさらにアルゴリズムの効率化がはかられると思われる。また、本研究は組合せ幾何学における k-set 問題、特に 3 次元空間における k-set 問題とも関わりが深い。なお、この研究は文部省科学研究費基盤研究 (c)(2)10680428 によるものであることを付記しておく。

参考文献

[1] C. Berge and A. Ghouila-Hour, *Programming, Games and Transportation Networks*, Wiley, New York (1965).

[2] D. Cheriton and R. E. Tarjan, "Finding minimum spanning trees", *SIAM Journal of Computing* **5** (1976) 724-742.

[3] A. C. Yao, "An $O(|E| \log\log |V|)$ algorithm for finding minimum spanning trees", *Information Processing Letters* **4** (1975) 21-23.

[4] J. B. Kruskal, "On the Spanning Subtree of a Graph and the Traveling Salesman Problem", Proceedings of AMS, **7** (1956) 48-50.

[5] R. C. Prim, "Shortest Connection Networks and Some Generalizations", *Bell System Technical Journal*, **36** (1957) 1389-1401.

[6] H. Ishii and S. Shiode, "Chance constrained spanning tree problem", *Journal of the Operations Research Society of Japan* **24** (1981) 147-157.

[7] H. Ishii, S. Shiode and T. Nishida, "Stochastic spanning tree problem", *Discrete Applied Mathematics* **3** (1981) 263-273.

[8] 伊藤健, 石井博昭, "必然性測度に基づくファジィ・スパニングツリー問題の一解法", *Journal of the Operations Research Society of Japan* **39** (1996) 247-257.

[9] H. Katagiri and H. Ishii, "A Revised Algorithm for Mimimum Spanning Tree with Fuzzy Costs ", *In Proceedings of 4th European Workshop on Fuzzy Decision Analysis and Neural Networks for Management, Planning and Optimization* (1998) in press.

[10] H. Kwakernaak, "Fuzzy random variable-1. Definitions and theorems", *Information Sciences* **15** (1978) 1-29.

[11] M. L. Puri and D. A. Ralescu, "Fuzzy random variables", *Journal of Mathmatical Analysis & Application.* **114** (1986) 409-422.

[12] N. Watanabe, "Fuzzy Random Variables and Statistical Inference", 日本ファジイ学会誌 **8** (1996) 126-135.

[13] G. Wang and Y. Zhang, "The theory of fuzzy stochastic processes", *Fuzzy Sets and Systems* **51** (1992) 161-178.

[14] K. Piasecki, "On fuzzily measurable random variables", *Fuzzy Sets and Systems* (1989) 65-87.
variables", *Fuzzy Sets and Systems* **92** (1997) 83-93.

[15] C. Zhong and G. Zhou, "The Equivalence of Two Definition of Fuzzy Random Variables", *in Preprints of 2nd IFSA Congress* (1987) 59-62.

[16] T. Dey, Improved bounds for planar k-set and related problems, Discrete Computational Geometry, 19 (1998), 373-382. Also in Proc. 38th IEEE Symp. on Fundations of Computer Science, 1997, 156-161.

[17] D. Dubois and H. Prade, "Operations on Fuzzy Numbers", *Int. Journal Systems Science* **9** (6) 613-626.

[18] 石井博昭, "「講座　数理計画法 10, 数理計画法の応用〈理論編〉」伊理正夫, 今野浩編, 第一章確率論的最適化" 産業図書 (1982).

[19] 乾口, ファジィ数理計画問題の可能性理論に基づく体系的定式化法, 大阪府立大学博士論文 (1991).

[20] M. Inuiguchi, "Fuzzy Linear Programming : What, Why, and How?" *Tatra Moutains Math. Publ.* **13** (1997), 123-167.

[21] M. Robens and J. Teghem, "Comparison between multiobjective fuzzy linear programming and multiobjective stochastic programming", *in : Lecture Notes in Econom. and Math. Systems* **310** (1988) 240-265.

[22] M. Inuiguchi and M. Sakawa, "A possibilistic linear program is equivalent to a stochastic linear program in a special case", *Fuzzy Sets and Systems* **76** (1995) 309-317.

[23] A. V. Yazenin, "Fuzzy and Stochastic Programming", *Fuzzy Sets and Systems* **22** (1987) 171-180.

[24] 太田, 山口, 高野, "係数間の関係を考慮したファジイ多目標計画法", 日本ファジィ学会誌 **6** **166-176**.

[25] 横山, 太田, 山口, "ファジイ多目的確率制約条件計画問題", 日本ファジィ学会誌 **6** **1193-1201**.

[26] M. K. Luhandjula, "Linear programming under randomness and fuzziness", *Fuzzy Sets and Systems* (1983).

[27] R. H. Mohamed, "A chance-constrained fuzzy goal program", *Fuzzy Sets and Systems* **47** (1992) 183-186 .

[28] M. Roubens and J. Teghem Jr., "Comparison of methodologies for fuzzy and stochastic multi-objective programming", *Fuzzy Sets and Systems* (1991) 119-132.

[29] S. Hulsuker, M. P. Biswal and S. B. Sinha, "Fuzzy programming approach to multi-objective stochastic linear programming problems", *Fuzzy Sets and Systems* **88** (1997) 173-181.

[30] Q. Zhong and W. Guang-yuan "On solutions and distribution problems of the linear programming with fuzzy random variable coefficients", *Fuzzy Sets and Systems* **58** (1993) 155-170.

[31] W. Guang-yuan and Q. Zhong, "Linear programming with fuzzy random variable coefficients", *Fuzzy Sets and Systems* **57** (1993) 295-311.

[32] Chao-Ming Hwang and Jing-Shing Yao, "Independent fuzzy random variables and their application", *Fuzzy Sets and Systems* **82** (1996) 335-350.

[33] D. Fernadez-Baca, G. Slutzki and D. Eppstein "Using Sparsification for Parametric Minimum Spanning Tree Problems", Nordic Journal of Computing **3** (1996) 352-366.